Material didactic pentru lecţia:
“Binomul lui Newton”

Prof. Cristina Ocean

Colegiul National Gheorghe Sincai

cuprins

Binomul lui Newton

Scopul lecţiei:

- Prezentarea formulei pentru $(a+b)^n, \;\; a,b \in \square$ şi $n \in \square^*$.
- Găsirea proprietăţilor pentru coeficienţii termenilor din dezvoltarea acestui binom.
- Aplicaţii.

Verificarea temei:

$\boxed{1}$ Scrieţi formulele pentru: $(a+b)^2, (a+b)^3$, găsiţi o modalitate de a calcula $(a+b)^4$ şi calculaţi $(a+b)^5$.

Răspuns:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = \left[(a+b)^2\right]^2 = (a+b)^2 \cdot (a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)^3 =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Răspundeţi la următoarele întrebări:

Ce puteţi spune despre <u>coeficienţii literelor?</u>

Ce puteţi spune despre <u>numărul de termeni</u> din fiecare dezvoltare?

Ce puteţi spune despre <u>exponenţii literelor?</u>

Răspunsuri:

- Coeficienţii termenilor extremi şi ai celor egal depărtaţi de termenii extremi sunt egali.
- Exponenţii puterilor lui a descresc de la cel mai mare la 0.
- Exponenţii puterilor lui b cresc de la 0 la cel mai mare.
- Exponentul cel mai mare pentru a şi pentru b este exponentul la care se ridică binomul.
- Numărul de termeni din dezvoltare depăşeşte cu 1 exponentul la care se ridică binomul.

Verificarea temei:

$\boxed{2}$ Calculaţi numerele C_n^k în situaţiile:

a) $n=1$; b) $n=2$; c) $n=3$; d) $n=4$; e) $n=5$.

Răspuns :

Folosind formula combininărilor $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ $n \geq k,\ n,k \in \mathbb{N}$ şi

utilizând formula combinărilor complementare $C_n^k = C_n^{n-k}$ obţinem:

$$C_1^0 = 1,\ C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = 1,\ C_2^1 = 2,\ C_2^2 = 1$$

$$C_3^0 = 1,\ C_3^1 = 3,\ C_3^2 = 3,\ C_3^3 = 1$$

$$C_4^0 = 1,\ C_4^1 = 4,\ C_4^2 = 6,\ C_4^3 = 4,\ C_4^4 = 1$$

$$C_5^0 = 1,\ C_5^1 = 5,\ C_5^2 = 10,\ C_5^3 = 10,\ C_5^4 = 5,\ C_5^5 = 1$$

Legat de a doua problemă din temă observăm următoarele:

Coeficienţii din dezvoltare sunt chiar numerele obţinute calculând C_n^k în situaţiile din temă:

a) $n=1$; b) $n=2$; c) $n=3$; d) $n=4$; e) $n=5$, anume:

a) 1 1

b) 1 2 1

c) 1 3 3 1

d) 1 4 6 4 1

e) 1 5 10 10 5 1

Astfel grupate se observă o modalitate de calcul a acestor numere din aproape în aproape (triunghiul lui Pascal).

Formula lui Newton

Are loc următoarea:

Teoremă (a binomului). Fie $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci:

$$\boxed{(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots\ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n}$$

cunoscută sub denumirea de formula lui Newton.

[Isaac Newton matematician, astronom, fizician englez (1643-1727)].

Demonstraţie cu metoda inducţiei matematice:

Etapa I. Verificare: $P(1)$: ...munca independentă...

Demonstrarea teoremei:

Fie $P(n):(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots.. + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots.. + C_n^n b^n, n \in \mathbb{N}$.

I. Verificare: $P(1)$: $(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b$ $\color{red}{(\mathbf{A})}$;

II. $P(n) \to P(n+1)$:

$$P(n+1):(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + \ldots..C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k + \ldots.. + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} \quad \color{red}{(\mathbf{?})}$$

$$P(n+1):(a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots.. + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots.. + C_n^n b^n\right) =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + C_n^1 a^n b + \ldots. + C_n^k a^{n-k+1} b^k + \ldots + C_n^n b^n + C_n^0 a^n b + C_n^1 a^{n-1} b^2 + \ldots.. +$$

$$+ C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + \ldots.. + C_n^n b^{n+1} \Rightarrow$$

$$(a+b)^{n+1} = \underbrace{C_n^0}_{C_{n+1}^0} a^{n+1} + \underbrace{\left(C_n^1 + C_n^0\right)}_{C_{n+1}^1} a^n b + \underbrace{\left(C_n^2 + C_n^1\right)}_{C_{n+1}^2} a^{n-1} b^2 + \ldots. + \underbrace{C_n^n}_{C_{n+1}^{n+1}} C_n^n b^{n+1} \quad \color{red}{(\mathbf{A})}.$$

Conform principiului inducţiei matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Precizări privind formula lui Newton:

1) Coeficienţii $C_n^0,\ C_n^1,\ \ldots C_n^k, \ldots, C_n^n$ se numesc **coeficienţi binomiali ai dezvoltării** şi sunt în număr de $n+1$.

A se face distincţie între coeficientul binomial al unui termen şi **coeficientul numeric** al acelui termen!

2) Cei n+1 termeni sunt:

$$T_1 = C_n^0 a^n,\ T_2 = C_n^1 a^{n-1} b,\ T_3 = C_n^2 a^{n-2} b^2, \ldots, \boxed{\mathbf{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k}}, \ldots, T_{n+1} = C_n^n b^n.$$

3) Numerele naturale $C_n^0,\ C_n^2,\ C_n^4 \ldots$ se numesc coeficienţi binomiali de rang impar, iar numerele $C_n^1,\ C_n^3,\ C_n^5 \ldots$ se numesc coeficienţi binomiali de rang par.

4) În formula lui Newton exponenţii puterilor lui a descresc de la n la 0, iar exponenţii puterilor lui b cresc de la 0 la n.

Precizări privind formula (continuare):

5) Coeficienţii binomiali ai termenilor extremi şi cei ai termenilor egal depărtaţi de termenii extremi sunt egali: $C_n^0 = C_n^n,\ C_n^1 = C_n^{n-1},\ C_n^2 = C_n^{n-2},\ \ldots,\ C_n^k = C_n^{n-k}.$

6) Dacă exponentul puterii este par n=2k atunci dezvoltarea are 2k+1 termeni, iar termenul din mijlocare coeficientul binomial cel mai mare:

$$C_n^0 < C_n^1 < C_n^2 \ldots < C_n^k > C_n^{k+1} > \ldots > C_n^n.$$

Dacă exponentul puterii este impar n=2k+1 atunci dezvoltarea are 2k+2 termeni şi există doi termeni la mijlocul dezvoltării cu coeficienţii binomiali egali şi de valoare cea mai mare: $C_n^0 < C_n^1 < C_n^2 \ldots < C_n^k = C_n^{k+1} > C_n^{k+2} \ldots > C_n^n.$

7) Un rol important în rezolvarea problemelor legate de binomul lui Newton îl joacă **termenul general** de rang k+1: $\boxed{T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k \in \{0,1,2,\ldots,n\}}$

Aplicaţie:

$\boxed{1}$ Calculaţi $(1+2x)^6$ folosind formula lui Newton.

După ce aţi dezvoltat binoamul cu ajutorul formulei completaţi:

a) T_4 =................

b) coeficientul binomial al lui T_3 este..........

c) coeficientul lui T_5 este..............

d) termenul liber al dezvoltării este..............

d) termenul care conţine x^5 este................

e) termenul care conţine x^9 este................

Formula

Răspuns:

$$\boxed{1}\ (1+2x)^6 = 1 + C_6^1 \cdot 2x + C_6^2 (2x)^2 + C_6^3 (2x)^3 + C_6^4 (2x)^4 + C_6^5 (2x)^5 + C_6^6 (2x)^6$$

Astfel :

a) $T_4 = C_6^3 (2x)^3 = 160x^3$

b) coeficientul binomial al termenului T_3 este $C_6^2 = 15$

c) coeficientul termenului T_5 este $C_6^4 \cdot 2^4 = 240$

d) termenul liber este $T_1 = 1$

e) termenul care conţine x^5 este $T_6 = C_6^5 (2x)^5 = 192x^5$

e) nu există termen care conţine x^9

Formula

Aplicaţie:

$\boxed{\mathbf{2}}$ Calculaţi $z=\left(y-i\right)^5$ folosind formula lui Newton şi răspundeţi la următoarele întrebări:

a) $T_4=$.................

b) coeficientul binomial al lui T_3 este..........

c) coeficientul lui T_4 este.........

d) $\mathrm{Re}\left(z\right)=$.......

e) $\mathrm{Im}\left(z\right)=$...........

Răspuns:

$\boxed{2}$ $(y-i)^5 = y^5 + C_5^1 y^4 (-i) + C_5^2 y^3 (-i)^2 + C_5^3 y^2 (-i)^3 + C_5^4 y (-i)^4 + C_5^5 (-i)^5$

$\Rightarrow (y-i)^5 = y^5 - C_5^1 y^4 i - C_5^2 y^3 + C_5^3 y^2 i + C_5^4 y - C_5^5 i$

În concluzie:

a) $T_4 = C_5^3 y^4 i$

b) coeficientul binomial al termenului T_3 este $C_5^2 = 10$

c) coeficientul termenului T_4 este $C_5^3 i = 10i$

d) $\mathrm{Re}(z) = y^5 - 10y^3 + 5y$

e) $\mathrm{Im}(z) = -5y^4 + 10y^2 - 1$

Formula

Aplicaţie:

$\boxed{\mathbf{3}}$ Fie binomul $\left(x^2+\frac{2}{x^3}\right)^8$. Să se determine:

a) Termenul al treilea al dezvoltării.

b) Termenul din mijloc.

c) Rangul termenului ce conţine pe x^6.

d) Termenului ce conţine pe x^1.

e) Termenul liber din dezvoltare.

(nu dezvoltaţi binomul!)

Răspuns:

$\boxed{3}$ Temenul general este: $T_{k+1}=C_8^k\left(x^2\right)^{8-k}\cdot\left(\frac{2}{x^3}\right)^k,\ k\in\{0,1,\ldots,8\}$

a) Luăm k=2 şi obţinem $T_3=T_{2+1}=C_8^2\left(x^2\right)^{8-2}\left(\frac{2}{x^3}\right)^2=112x^6$

b) Cum n=8 înseamnă că dezvoltarea are 9 termeni şi

termenul din mijloc este $T_5=T_{4+1}=C_8^4\left(x^2\right)^{8-4}\left(\frac{2}{x^3}\right)^4=1120x^{-4}$.

c) Pentru a găsi termenul care conţine x^6 folosim din formula lui T_{k+1} factorul x cu exponentul său:

$$\left(x^2\right)^{8-k}\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)^k=x^6\Rightarrow x^{2(8-k)}\cdot x^{-3k}=x^6\Rightarrow 16-5k=6\Rightarrow k=2\Rightarrow T_3.$$

d) Repetăm raţionamentul şi găsim $x^{16-5k}=x^1\Rightarrow k=3\Rightarrow T_4=448x$.

e) Analog $x^{16-5k}=x^0\Rightarrow 16-5k=0\Rightarrow k\notin\mathbb{N}\Rightarrow$ Nu există termen liber.

Termen general

Aplicaţie:

$\boxed{4}$ **Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ ştiind că al zecelea termen al dezvoltării binomului $(3+n)^n$ este cel mai mare dintre termenii dezvoltării.**

Răspuns:

$\boxed{4}$ Termenul T_{10} este cel mai mare al dezvoltării dacă

$T_{10} \geq T_9$ și $T_{10} \geq T_{11}$ sau echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} C_n^8 3^{n-8} \cdot n^8 \leq C_n^9 3^{n-9} \cdot n^9 \\ C_n^{10} 3^{n-10} \cdot n^{10} \leq C_n^9 3^{n-9} \cdot n^9 \end{cases}, \text{ unde } n \geq 10, n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{n-8} \leq \dfrac{n}{9} \\ \dfrac{n}{10} \leq \dfrac{3}{n-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in \left(4+\sqrt{43}, \infty\right) \cap \mathbb{N} \\ n \in \left(\dfrac{9-\sqrt{201}}{2}, \dfrac{9+\sqrt{201}}{2}\right) \cap \mathbb{N} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n \in \left(4+\sqrt{43}, \frac{9+\sqrt{201}}{2}\right) \cap \mathbb{N} = \{11\} \Rightarrow n = 11$$

Termen general

Aplicaţie:

$\boxed{\mathbf{5}}$ Fie binomul $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$.

a) Determinaţi numărul de termeni din dezvoltare.

b) Aflaţi câţi termeni raţionali are dezvoltarea.

c) Câţi termeni iraţionali are dezvoltarea?

Termen general

Răspuns:

$\boxed{5}$ a) Binomul $\left(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\right)^{100}$ are în dezvoltare 101 termeni.

b) Formula temenului general este:

$$T_{k+1}=C_{100}^{k}\left(\sqrt{2}\right)^{100-k}\left(\sqrt[3]{3}\right)^{k},\ k=\overline{0,100}.$$

$$T_{k+1}\in \mathbb{Q}\ \Rightarrow \begin{cases} 2 \mid 100-k \\ 3 \mid k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \mid k \\ 3 \mid k \end{cases} \Rightarrow 6 \mid k \Rightarrow k\in\{0,6,....,96\}$$

sau se mai scrie $k\in\left\{0,6\cdot\boxed{1},6\cdot\boxed{2},6\cdot\boxed{3},....,6\cdot\boxed{16}\right\}\Rightarrow$

$\Rightarrow$ există 17 termeni raţionali.

c) În concluzie sunt $101-17=84$ termeni iraţionali.

Identităţi în calculul cu combinări

Utilizând formula lui Newton de dezvoltare a binomului $(a+b)^n$

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots\ldots C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots\ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

se pot deduce câteva identităţi interesante în care intervin coeficinţii binomiali.

- Particularizând în formula lui Newton $a = b = 1$ găsim:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots + C_n^{n-1} + C_n^n$$

Suma coeficienţilor binomiali ai dezvoltării este 2^n

- În aceeaşi formulă a lui Newton luând $a = 1$ şi $b = -1$ obţinem:

$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots\ldots(-1)^n C_n^n$$

Suma alternantă a coeficienţilor binomiali este 0

Identităţi în calculul cu combinări (continuare)

Adunând cele două sume membru cu membru obţinem:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots.. + C_n^{n-1} + C_n^n$$

$$\underline{0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots..(-1)^n C_n^n}$$

$$2^n = 2\left(C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots..\right) \text{ sau}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \ldots. \\ \text{Suma coeficienţilor binomiali de rang impar este } 2^{n-1} \end{array}}$$

Scăzând cele două sume obţinem:

$$2^n = 2\left(C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \ldots..\right) \text{ sau}$$

$$\boxed{\begin{array}{c} 2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + \ldots. \\ \text{Suma coeficienţilor binomiali de rang par este } 2^{n-1} \end{array}}$$

Aplicaţie:

$\boxed{6}$ Să se calculeze suma:

$$S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots.. + nC_n^n.$$

a) utilizând egalitatea $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$

pentru $n,k \in \mathbb{N}^*, n \geq k$;

b) utilizând formula combinărilor complementare:

$C_n^k = C_n^{n-k}$ pentru $n,k \in \mathbb{N}, n \geq k$;

Răspuns:

a) Demonstrarea formulei:

$$kC_n^k = k\frac{n!}{k!.(n-k)!} = k\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} =$$

$$= n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = nC_{n-1}^{k-1}$$

Astfel suma se rescrie:

$$S_n = nC_{n-1}^0 + nC_{n-1}^1 + nC_{n-1}^2 + \dots + nC_{n-1}^{n-1} =$$

$$= n\left(C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \dots + C_{n-1}^{n-1}\right) = n \cdot 2^{n-1}$$

Răspuns (continuare):

b) Rescriem suma S_n utilizând formula combinărilor complementare, $C_n^k = C_n^{n-k}$ şi se obţine:

$$S_n = C_n^{n-1} + 2C_n^{n-2} + 3C_n^{n-3} + \ldots\ldots + (n-1)C_n^1 + nC_n^0 =$$

$$= nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + \ldots\ldots + 3C_n^{n-3} + 2C_n^{n-2} + C_n^{n-1}.$$

Adunăm cele două sume:

$$S_n = C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + (n-2)C_n^{n-2} + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n$$

$$S_n = nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + (n-2)C_n^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 2C_n^{n-2} + \ldots + C_n^{n-1}$$

$$2S_n = n\left(C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n\right) \Rightarrow$$

$$2S_n = n \cdot 2^n \Rightarrow S_n = 2^{n-1} \cdot n$$

Aplicaţie:

$\boxed{7}$ Să se demonstreze egalitatea

$$\frac{C_n^k}{k+1} = \frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}$$ pentru $n,k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$

şi apoi să se calculeze suma:

$$S_n = C_n^0 + \frac{C_n^1}{2} + \frac{C_n^2}{3} + \ldots.. + \frac{C_n^n}{n+1}$$

Răspuns:

$\boxed{7}$ Demonstrarea formulei:

$$\frac{C_n^k}{k+1}=\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!}\cdot\frac{n+1}{n+1}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}=\frac{C_{n+1}^{k+1}}{n+1}.$$

Cu această formulă rescriem fiecare termen al sumei

$$S_n=C_n^0+\frac{C_n^1}{2}+\frac{C_n^2}{3}+\ldots..+\frac{C_n^n}{n+1}=\frac{C_{n+1}^1}{n+1}+\frac{C_{n+1}^2}{n+1}+\ldots.+\frac{C_{n+1}^{n+1}}{n+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+\ldots.+C_{n+1}^{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+\ldots.+C_{n+1}^{n+1}-1\right)=\frac{1}{n+1}\left(2^{n+1}-1\right)$$

Test

Fie binomul $\left(\frac{1}{x} - \sqrt[3]{x}\right)^{14}$, $x \neq 0$.

1) Câţi termeni are dezvoltarea?

2) Care este rangul termenului din mijloc?

3) Care este suma coeficienţilor binomiali ai acestui binom?

Folosind formul termenului general, $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ aflaţi:

4) Rangul termenului care conţine pe x^2.

5) Câţi termeni raţionali are dezvoltarea?

Temă

1) Să se afle termenul dezvoltării binomului $\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ care îl conţine pe x^5 dacă suma coeficienţilor binomiali este 128.

2) Se consideră dezvoltarea $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^n$, $x \in \square^*$, $n \in \square^*$.

a) Să se determine n astfel încât suma coeficienţilor primilor trei termeni ai dezvoltării să fie 97.

b) Pentru n=8 verificaţi dacă există un termen care-l conţine pe x^4.

c) Pentru n=80 aflaţi suma coeficienţilor dezvoltării.

3) a) Să se scrie numărul complex $z=1+i$ sub forma trigonomtrică şi apoi să se clculeze z^n cu formula lui Moivre;

b) Să se dezvolte $(1+i)^n$ după formula lui Newton;

c) Egalând egalităţile de la a) şi b) să se deducă egalităţile:

$$C_n^0-C_n^2+C_n^4-C_n^6+\ldots\ldots=\left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4} \quad \text{şi} \quad C_n^1-C_n^3+C_n^5-C_n^7+\ldots\ldots=\left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{4}$$